Devoir surveillé n° 1

Exercice 1.

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : n, u, p
Saisir n entier naturel
p prend la valeur 0
u prend la valeur 1/2
Tant que (p < n) faire
    u prend la valeur (2/3)u − 1
    p prend la valeur p + 1
Fin Tant que
Afficher u
```

On désire faire tourner cet algorithme pour $n = 4$, compléter le tableau en feuille annexe (page 3) et l'affichage de u.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n + 3$.

- **a.** Calculer v_0, v_1 et v_2.
- **b.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3.

- **a.** Exprimer v_n en fonction de n.
- **b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -3 + \frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- **c.** En déduire la limite de u_n.

Partie C

1. Montrer que (u_n) est minorée par -3.

2. On admet que (u_n) est décroissante. Soit p un entier naturel non nul.
Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$-3 \leqslant u_n \leqslant -3 + 10^{-p}$$

3. On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $-3 \leqslant u_n \leqslant -3 + 10^{-p}$.

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

   b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

   c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

   d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

   b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
   Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Feuille annexe

Nom :
Prénom :

Exercice 1.
Partie A

n	4					
p	0	....	....	....	....	....
u	$\frac{1}{2}$	....	....	....	....	....
$p < n$?		....	....	....	....	....

Affichage $u =$ ....